11/2008 - Nouvelle Calédonie EXERCICE III : UN JOUR D'ORAGE (4 points)
Correction © http://labolycee.org

1. Modélisation de l'éclair nuage - sol

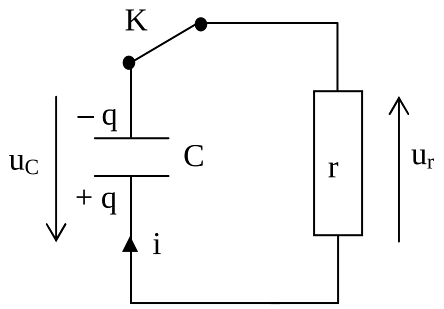


Schéma électrique équivalent

1.1. Loi d'additivité des tensions : $u_C(t) + u_r(t) = 0$ (1)

Loi d'Ohm : $u_r(t) = r \cdot i(t)$

D'autre part $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ avec $q(t) = C.u_C(t)$,

C étant constante $i(t) = C.\dfrac{du_C(t)}{dt}$.

Donc : $u_r(t) = r \cdot i(t) = r.C.\dfrac{du_C(t)}{dt} = \tau.\dfrac{du_C(t)}{dt}$ avec $\tau = r.C$

On reporte dans (1) : $u_C(t) + \tau.\dfrac{du_C(t)}{dt} = 0$

Finalement : $\boxed{\dfrac{du_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau}.u_C(t) = 0}$

1.2. Analyse dimensionnelle :

Loi d'Ohm : $u = r \cdot i$ donc $[u] = [r] \cdot [i]$ $\Leftrightarrow$ $[r] = \dfrac{[u]}{[i]}$

Et : $i(t) = C.\dfrac{du_C(t)}{dt}$ donc $[i] = [C] \cdot \dfrac{[U]}{[T]}$ $\Leftrightarrow$ $[C] = \dfrac{[i].[T]}{[u]}$

D'où : $[\tau] = [r] \cdot [C] = \dfrac{[u]}{[i]} \cdot \dfrac{[i].[T]}{[u]} = [T]$ ainsi τ est bien homogène à un temps.

1.3. L'expression $u_C(t) = U.e^{-t/\tau}$ est solution de (1) si elle vérifie l'équation (1) :

Or : $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{d(U.e^{-t/\tau})}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}.U.e^{-t/\tau} = -\dfrac{1}{\tau}.u_C(t)$

Calculons : $\dfrac{du_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau}.u_C(t) = -\dfrac{1}{\tau}.u_C(t) + \dfrac{1}{\tau}.u_C(t) = 0$

Ainsi, l'expression $u_C(t) = U.e^{-t/\tau}$ est bien solution de (1).

2. Foudre et sécurité

2.1. $i(t) = C.\dfrac{du_C(t)}{dt} = -C.\dfrac{1}{\tau}\,U.e^{-t/\tau} = -C.\dfrac{1}{r.C}.U.e^{-t/\tau} = -\dfrac{U}{r}.e^{-t/\tau}$

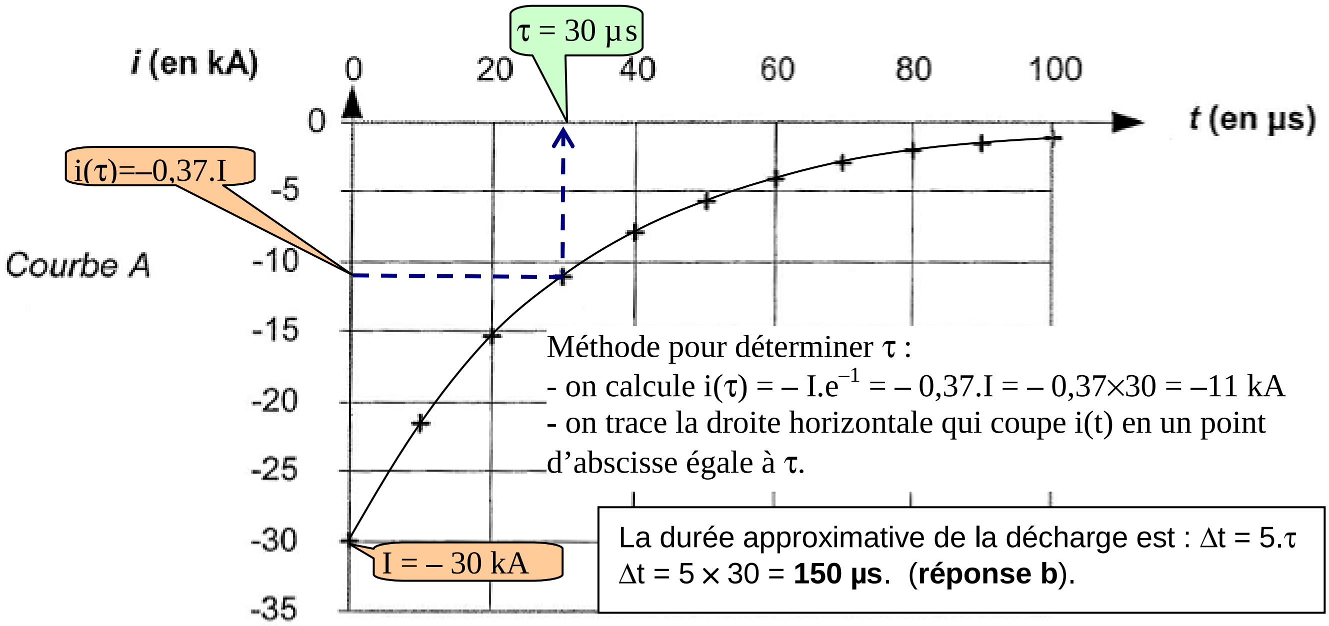
Cette expression est bien de la forme $i(t) = -I.e^{-t/\tau}$ à condition que : $\boxed{I = \dfrac{U}{r}}$

2.2. On a : $i(0) = -I.e^{-0/\tau} = -I$

$i(\infty) = -I.e^{-\infty} = 0$

La seule courbe qui vérifie les deux conditions précédentes sur l'intensité est la courbe A.

2.3. Détermination de τ : voir ci-après.



2.4. $E_{él} = ½.C.u_C^2$: lorsque « le condensateur » est chargé : $u_C(t) = U$

donc $E_{él} = ½.C.U^2$ alors $\boxed{C = \dfrac{2.E_{él}}{U^2}}$

avec U = 100x10^6 V (texte encadré « 100 millions de volts ») U = 1,00x10^8 V et $E_{él}$ = 5,0x10^7 J

$$\mathbf{C} = \frac{2\times 5{,}0\times 10^{7}}{\left(1{,}00\times 10^{8}\right)^{2}} = \frac{1{,}0\times 10^{8}}{\left(1{,}00\times 10^{8}\right)^{2}} = 1{,}0 \times 10^{-8}\text{ F} = 10\times 10^{-9} = \mathbf{10\ nF.}$$

3. Le tonnerre

3.1. Une onde mécanique progressive est la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière mais avec transport d'énergie.

3.2. Le tonnerre est un bruit, il s'agit d'une **onde sonore**, donc d'une onde mécanique **longitudinale**. (Les contractions/dilatations de l'air ont lieu dans la même direction que la propagation du son).

3.3. célérité : $\boxed{\lambda = v / \nu}$ avec λ en m, v en m.s^{-1} et ν en Hz.

pour ν = 20 Hz : $\lambda = \dfrac{340}{20}$ = **17 m**

pour ν = 20 kHz : $\lambda = \dfrac{340}{20\times 10^{3}}$ = 17×10^{-3} m = **17 mm**

4. L'orage est tout près …

4.1. Soit la durée séparant la réception de l'éclair de la réception du tonnerre : $\Delta t = t_{son} - t_{ecl}$

Or : $v_{son} = \dfrac{d}{t_{son}}$ et $c = \dfrac{d}{t_{ecl}}$ donc : $t_{son} = \dfrac{d}{v_{son}}$ et $t_{écl} = \dfrac{d}{c}$

En reportant dans Δt et en factorisant par d, il vient : $\boxed{\Delta t = d.\left(\dfrac{1}{v_{son}} - \dfrac{1}{c}\right)}$

4.2. On a c = 3x10^8 m.s^{-1} et v_{son} = 340 m.s^{-1} , donc $c >> v_{son}$ alors $\left(\dfrac{1}{v_{son}} >> \dfrac{1}{c}\right)$

L'expression de Δt devient alors : $\Delta t \approx d.\left(\dfrac{1}{v_{son}}\right) \Leftrightarrow d = \Delta t.v_{son}$

En convertissant $\mathbf{v_{son}}$ en **km.s^{-1}** il vient : v_{son} = 340 m.s^{-1} = 0,340 km.s^{-1}

L'expression de **d** en **km** est alors : d = 0,340 × Δt (avec Δt en s).

Et : $d = 0{,}340 \times \Delta t \approx 0{,}333 \times \Delta t = \dfrac{\Delta t}{3}$ finalement $\boxed{d \approx \dfrac{\Delta t}{3}}$ avec **d en km et Δt en s.**