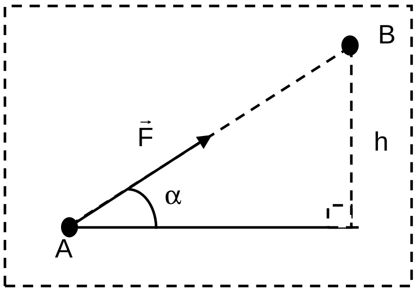
Amérique du Nord 2009 Exercice I : LE HOCKEY SUR GAZON (5 points)
Correction © http://labolycee.org

A – Première phase

1.1. Deuxième loi de Newton : Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures $\Sigma\vec{F}_{Ext}$ exercée sur un système de masse *m* est égale au produit de la masse *m* par le vecteur accélération $\vec{a}$: $\boxed{\Sigma\vec{F}_{Ext} = m.\vec{a}}$



On étudie le mouvement du système {balle} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

En négligeant les actions liées à l'air et le poids de la balle (énoncé) devant la force $\vec{F}$ exercée par la crosse, la deuxième loi de Newton appliquée à la balle sur son trajet entre A et B s'écrit : $\vec{F} = m.\vec{a}$.

1.2. La trajectoire de la balle entre A et B, est une droite : le mouvement est **rectiligne**.
La force $\vec{F}$ est supposée constante (énoncé) donc le vecteur accélération $\vec{a}$ est aussi constant (m = Cte). Ainsi, sur le trajet entre A et B, la balle est animée d'un **mouvement rectiligne uniformément accéléré.**

2.1. Par définition du vecteur accélération : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$.

Pour Δt suffisamment « petit » : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \approx \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t}$.

Or la balle part du point A sans vitesse initiale (énoncé) donc il vient : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{\vec{v}_B}{\Delta t}}$

2.2. $a = \dfrac{v_B}{\Delta t} = \dfrac{14}{0,11}$ = 127,27 = $\mathbf{1,3 \times 10^2\ m.s^{-2}}$ *valeur non arrondie stockée en mémoire pour la suite*

3. De la relation vectorielle $\vec{F} = m.\vec{a}$ il vient : **F = m.a** donc **F** = 0,160 $\times$ 127,27 = **20 N**.

Le poids $\vec{P}$ de l'objet a pour valeur : **P** = **m.g** = 0,160 $\times$ 9,8 = **1,6 N**.

$\dfrac{F}{P} = \dfrac{20}{1,6} \approx 13$ donc la valeur de la force F est environ 13 fois plus grande que celle du poids de la balle. L'hypothèse qui néglige le poids devant la force exercée par la crosse sur la balle n'est pas justifiée, il faudrait $\dfrac{F}{P} \geq 100$.

B – Deuxième phase

1. Trajectoire de la balle.

1.1. Le mouvement de la balle est maintenant étudié dans le référentiel terrestre associé au repère (O,x,z) .

Coordonnées du vecteur $\vec{v}_B \begin{cases} v_{Bx} = v_B.\cos\alpha \\ v_{Bz} = v_B.\sin\alpha \end{cases}$

1.2. Coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OB} \begin{cases} x_B = 0 \\ z_B = h \end{cases}$

1.3. Quel que soit le point G de la trajectoire, les coordonnées du vecteur vitesse au point G sont : $\vec{v} \begin{cases} v_x = v_B.\cos\alpha \\ v_z = v_B.\sin\alpha - gt \end{cases}$

La composante horizontale du vecteur vitesse, $\mathbf{v_x = v_B.\cos\alpha}$, est une constante qui ne dépend pas de la position du point G choisi.

Au sommet S de la trajectoire, **le vecteur vitesse de la balle est horizontal**, donc $v_{Sz} = 0$.

La norme du vecteur vitesse au point S est alors : $v_S = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sz}^2} = v_{Sx} = v_B.\cos\alpha$

Ainsi : $\mathbf{v_S} = v_B.\cos\alpha = 14 \times \cos(30) =$ **$12\ m.s^{-1}$.**

1.4. Par définition du vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}}$ ainsi : $\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_B.\cos\alpha \\ v_z = \frac{dz}{dt} = v_B.\sin\alpha - g.t \end{cases}$

Par intégration, et en tenant compte des conditions initiales $x(0) = x_B = 0$ et $z(0) = z_B = h$

$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = (v_B.\cos\alpha)t + x_B \\ z = (v_B.\sin\alpha)t - \frac{1}{2}g.t^2 + z_B \end{cases}$ finalement : $\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = (v_B.\cos\alpha)t \\ z = h + (v_B.\sin\alpha)t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$

1.5. Équation de la trajectoire : on isole le temps « t » de la première équation que l'on reporte dans l'expression de z :

$t = \frac{x}{v_B.\cos\alpha}$ donc $z(x) = h + (v_B.\sin\alpha).\frac{x}{v_B.\cos\alpha} - \frac{1}{2}.g\left(\frac{x}{v_B.\cos\alpha}\right)^2$

finalement : $\boxed{z(x) = h + \tan\alpha.x - \frac{1}{2}.g\left(\frac{x}{v_B.\cos\alpha}\right)^2}$

équation d'une parabole de la forme $z(x) = a.x^2 + bx + c$ de concavité tournée vers le bas car $a < 0$.

2.1. Pour que le but soit marqué il faut pour $x = d$, que $0 \leq z(d) \leq L$.

2.2. Pour $x = d = 15$ m , $z(d) = h + \tan\alpha.d - \frac{1}{2}.g\left(\frac{d}{v_B.\cos\alpha}\right)^2$

$z(d) = 0{,}40 + \tan(30°) \times 15 - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times \left(\frac{15}{14 \times \cos 30}\right)^2 =$ **1,6 m**.

On a donc bien : $0 \leq z(d) \leq L = 2{,}14$ m.

<u>C – Étude énergétique</u>

1. Énergie potentielle de pesanteur : $\boxed{E_P(z) = m.g.z}$

Énergie mécanique : $\boxed{E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.z}$

2. Au point B : $\mathbf{E_M(B)} = \frac{1}{2}.m.v_B^2 + m.g.h = 0{,}5 \times 0{,}160 \times (14^2) + 0{,}160 \times 9{,}8 \times 0{,}40 =$ **16 J**.

3.1. En négligeant les actions de l'air, l'énergie mécanique **est constante** au cours du mouvement de la balle.

3.2. Ainsi : $E_M(B) = E_M(S) = E_M$

$E_M = \frac{1}{2}.m.v_S^2 + m.g.z_{max} \Leftrightarrow E_M - \frac{1}{2}.m.v_S^2 = m.g.z_{max} \Leftrightarrow \frac{E_M}{m} - \frac{v_S^2}{2} = g.z_{max}$

$\Leftrightarrow \boxed{z_{max} = \frac{1}{g}.\left(\frac{E_M}{m} - \frac{v_S^2}{2}\right)}$

$z_{max} = \frac{1}{9{,}8}\left(\frac{16{,}3}{0{,}160} - \frac{12^2}{2}\right) =$ **3,1 m**. *Calcul effectué avec la valeur non arrondie de E_m du 2.*