Exercice 1 – Étude d'un lave-linge (11 points)

La maitrise de la durée des différentes étapes du cycle de lavage d'un lave-linge permet de garantir un nettoyage efficace tout en préservant les vêtements. Chaque phase - lavage, rinçage, essorage - est ainsi optimisée, en fonction du type de linge, en termes de consommation d'eau, d'énergie consommée et de durabilité de la machine.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les premières phases du fonctionnement d'un lave-linge, le remplissage de la cuve et le chauffage de l'eau, lors de tests effectués en l'absence de linge.

1. Remplissage de la cuve

Le lave-linge peut être assimilé à un tambour tournant dans une cuve de forme cubique et de côté a. Pour réguler le niveau d'eau dans la cuve d'un lave-linge, un pressostat mesure la pression de l'air dans une chambre de compression cylindrique reliée au bas de la cuve : lorsque le niveau d'eau monte dans la cuve, une partie de cette eau entre dans la chambre de compression et l'air enfermé à l'intérieur est comprimé. Quand la pression atteint une valeur seuil, le pressostat envoie un signal et interrompt le remplissage.
Dans cette partie, on s'intéresse à un test de la machine : le pressostat est alors réglé pour permettre le remplissage de la moitié de la cuve.

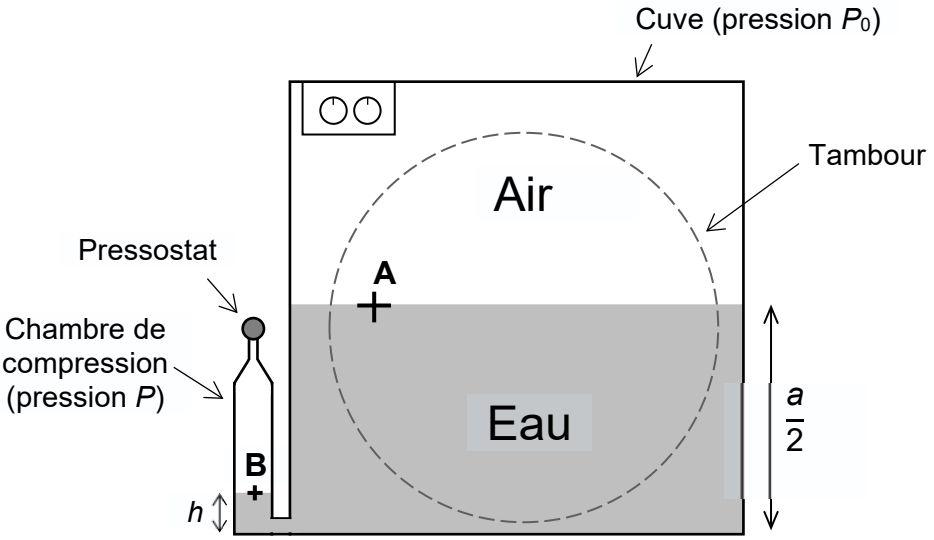


Figure 1. Schéma de la cuve et du pressostat d'un lave-linge

Données :

- volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H : $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$;
- intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1{,}0\times10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- paramètres associés au lave-linge étudié :
  - la cuve est un cube de côté $a = 60{,}0$ cm et de volume $V_c = a^3$;
  - la chambre de compression est assimilée à un cylindre de rayon $r = 3{,}0$ cm ;
  - la pression de l'air dans la cuve reste constamment égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1{,}01\times10^5$ Pa ;
  - durant le remplissage, l'air et l'eau sont supposés à la même température $\theta_0 = 20$ °C ;
  - le débit volumique D_v d'arrivée d'eau dans le lave-linge vaut $12\times10^{-3}\ \text{m}^3\cdot\text{min}^{-1}$.

Q1. Exprimer la durée Δt_1 permettant de remplir à moitié la cuve en fonction du débit volumique de l'eau D_v et de la longueur a du côté du cube. Calculer numériquement Δt_1, exprimé en minutes.

La quantité d'air présente dans la chambre de compression reste constante, ainsi que sa température. Avant le remplissage, l'air occupe un volume V_0 = 0,50 L et la pression dans le pressostat est telle que $P = P_0$. Après le remplissage, la hauteur d'eau dans la chambre de compression est h = 5,0 mm et la pression dans le pressostat est telle que $P = P_2$. On considère que l'air se comporte comme un gaz parfait.

Q2. Justifier que la pression augmente dans la chambre de compression lors du remplissage.

Q3. Exprimer le volume V_2 occupé par l'air dans la chambre de compression à l'arrêt du remplissage, en fonction de V_0, r et h.

Q4. Exprimer P_2 en fonction des données, puis montrer que la surpression $\Delta P = P_2 - P_0$ entre la pression qui a provoqué l'arrêt du remplissage et la pression initiale, peut s'écrire :

$$\Delta P = P_0 \times \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{V_0 - \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

On rappelle que, dans les conditions du test, la hauteur d'eau dans la chambre de compression est h = 5,0 mm.

Q5. Calculer la valeur de la surpression ΔP lors du test dans lequel le remplissage s'arrête lorsque la machine est à moitié remplie. Commenter la valeur obtenue par rapport à celle d'un cycle normal hors test, pour lequel ΔP = 150 Pa.

On rappelle la loi fondamentale de la statique des fluides : dans un fluide incompressible au repos de masse volumique ρ, la pression P à l'altitude z, $P(z)$, vérifie la relation $P(z) + \rho \cdot g \cdot z$ = constante.

Q6. Retrouver la valeur de la surpression ΔP lors du test à l'aide de la loi fondamentale de la statique des fluides appliquée entre les points A et B de la figure 1.

Lorsque la machine n'est plus en phase de test mais en fonctionnement normal et sans linge, la surpression ΔP vaut 150 Pa. On considère alors que la hauteur d'eau dans la chambre de compression, h, est négligeable devant la hauteur d'eau dans la cuve.

Q7. Déterminer le volume d'eau contenu dans la cuve en fonctionnement normal et sans linge.

2. Durée de temporisation

La minuterie d'un lave-linge utilise des circuits électroniques pour activer et désactiver les différentes fonctions du lave-linge. Il est nécessaire d'ajouter une durée de temporisation entre deux étapes d'un cycle pour laisser le temps à la machine de se stabiliser, éviter les chocs mécaniques et garantir que chaque phase démarre dans de bonnes conditions.
L'objectif de cette partie est d'étudier une modélisation simple d'un temporisateur de lave-linge à l'aide du montage de la figure 2.

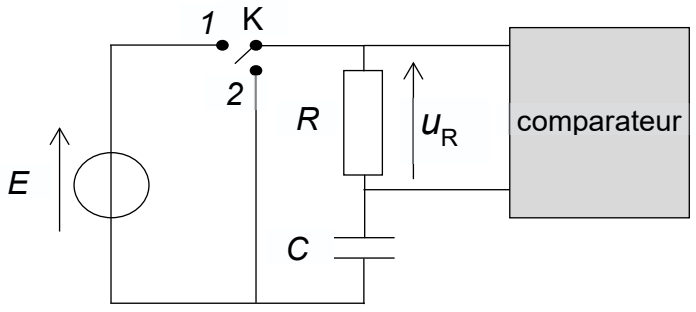


Figure 2. Schéma du montage modélisant un temporisateur

Le montage est constitué :

- d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E = 4,5 V ;
- d'un conducteur ohmique de résistance R ;
- d'un condensateur de capacité C ;
- d'un interrupteur K ayant deux positions : position 1 pour la charge du condensateur et position 2 pour la décharge du condensateur ;
- d'un comparateur configuré pour envoyer un signal mettant fin à la temporisation à l'instant t_{seuil} pour lequel la tension u_R aux bornes de la résistance atteint un tiers de la tension d'alimentation :

$$u_R(t_{seuil}) = \frac{E}{3}$$

On admet que le comparateur ne perturbe pas le fonctionnement du circuit. Celui-ci peut donc être étudié comme si le comparateur était absent.

À l'instant initial (t = 0), le condensateur étant déchargé, on place l'interrupteur K en position 1.

Q8. Montrer que l'équation différentielle donnant les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps est de la forme :

$$u_C(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}(t) = E$$

Les solutions de l'équation différentielle précédente sont des fonctions du temps de la forme $u_C(t) = A\,(1 - e^{-t/\tau})$, avec $\tau = R \cdot C$.

Q9. Déterminer l'expression de la constante A dans la situation étudiée.

Q10. En déduire que l'expression de la tension aux bornes du conducteur ohmique au cours du temps est $u_R(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$.

Q11. Montrer que la date de fin de temporisation t_{seuil}, date à laquelle le comparateur envoie un signal, s'exprime comme $t_{seuil} = \tau \cdot \ln 3$.

La durée de temporisation, notée Δt_2, est définie par $\Delta t_2 = t_{seuil}$. Pour étudier expérimentalement cette durée de temporisation, on réalise au laboratoire le circuit précédent en remplaçant le comparateur par un système d'acquisition. On souhaite obtenir une durée de temporisation Δt_2 voisine de 30 s. On utilise un condensateur de capacité C = 4,70 mF alimenté par un générateur de tension E = 4,5 V. On dispose par ailleurs de plusieurs conducteurs ohmiques de résistances R_1 = 470 Ω, R_2 = 5,0 kΩ et R_3 = 100 kΩ.

Q12. Parmi les valeurs proposées, déterminer la valeur de la résistance du conducteur ohmique à utiliser pour obtenir une durée de temporisation voisine de celle souhaitée.

On réalise le circuit électrique avec la valeur de la résistance trouvée à la question **Q12**. On charge le condensateur et on bascule l'interrupteur en position 2, puis on suit l'évolution de la tension aux bornes de la résistance lors de la décharge. Le graphique correspondant est présenté sur la figure 3.

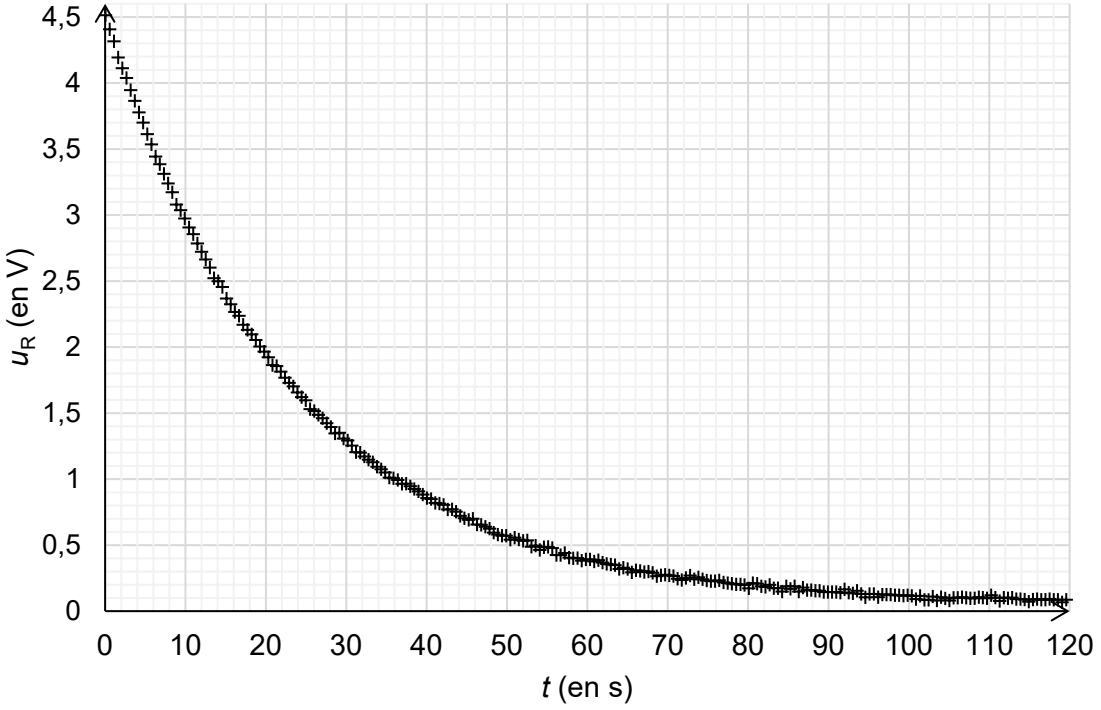


Figure 3. Évolution de la tension $u_R(t)$ aux bornes de la résistance en fonction du temps

Q13. Déterminer graphiquement la valeur initiale $u_R(t = 0)$ de la tension aux bornes du conducteur ohmique après avoir basculé l'interrupteur en position 2 et vérifier qu'elle est en accord avec la valeur de $u_R(t = 0)$ obtenue en appliquant la loi des mailles.

Q14. Déterminer, à l'aide du graphique de la figure 3, la valeur expérimentale τ_{exp} de la constante de temps du circuit RC. Commenter.

3. Chauffage de l'eau

Après le remplissage de la cuve et un temps de temporisation, l'eau est chauffée par une résistance électrique, appelée thermoplongeur, parcourue par un courant électrique. On s'intéresse, dans cette partie, au chauffage de l'eau contenue dans la cuve, de la température ambiante $\theta_0 = 20$ °C jusqu'à la température $\theta_f = 30$ °C.

Afin de modéliser les échanges thermiques ayant lieu lors du chauffage, on considère que :

- la cuve est isolée thermiquement du milieu extérieur ;
- la température de l'eau est uniforme.

Données :

- volume d'eau dans la cuve : $V_{eau} = 5{,}7$ L ;
- masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1{,}0\times10^3$ kg·m^{-3} ;
- capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4{,}18\times10^3$ J·kg^{-1}·K^{-1} ;
- puissance électrique fournie au thermoplongeur : $P_{él} = 2$ kW, supposée constante.

Q15. Nommer les trois modes possibles de transferts thermiques et indiquer celui qui peut être négligé lors du chauffage de l'eau.

Q16. Montrer que la valeur du transfert thermique Q nécessaire pour chauffer l'eau de θ_0 à θ_f est d'environ 0,24 MJ.

On fait l'hypothèse que la puissance électrique fournie au thermoplongeur est intégralement transmise à l'eau sous la forme d'un flux thermique Φ de valeur constante : $P_{él} = \Phi$.

Q17. Calculer la durée nécessaire de fonctionnement du thermoplongeur Δt_3, en minutes, pour que l'eau contenue dans la cuve passe de la température θ_0 = 20 °C à la température θ_f = 30 °C.

On peut modéliser le flux thermique Φ du thermoplongeur vers l'eau par la relation $\Phi = h_c \cdot S \cdot (\theta_{thermo} - \theta_{eau})$, avec :

- h_c : coefficient de transfert thermique entre le thermoplongeur et l'eau ;
- S : surface du thermoplongeur ;
- θ_{thermo} et θ_{eau} : températures respectives du thermoplongeur et de l'eau.

Données :

- coefficients de transfert thermique typiques entre le thermoplongeur et l'eau :
  - sans brassage de l'eau : $h_{c,0} = 1{,}0 \times 10^3$ W·m^{-2}·K^{-1} ;
  - avec brassage de l'eau : $h_{c,0}' = 4{,}0 \times 10^3$ W·m^{-2}·K^{-1}.
- surface de contact thermoplongeur-eau : S = 0,020 m^2.

Q18. Déterminer les températures du thermoplongeur avec et sans brassage de l'eau quand l'eau a atteint la température θ_f.

Lors de l'utilisation du lave-linge, une mince couche de tartre peut se déposer sur le thermoplongeur. Afin d'étudier son impact sur le chauffage, une modélisation plus poussée simule l'évolution de la température de l'eau et du thermoplongeur en fonction du temps de chauffage.
La modélisation est réalisée en considérant un brassage efficace de l'eau. Les résultats de cette modélisation sont donnés en figures 4 et 5 ci-dessous.

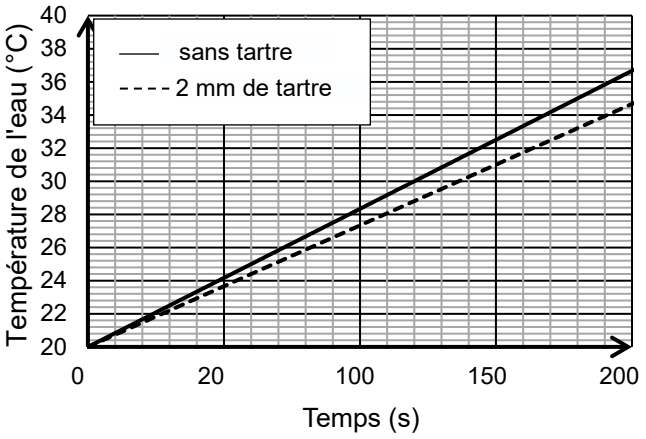


Figure 4. Simulation de la température de l'eau pendant le chauffage

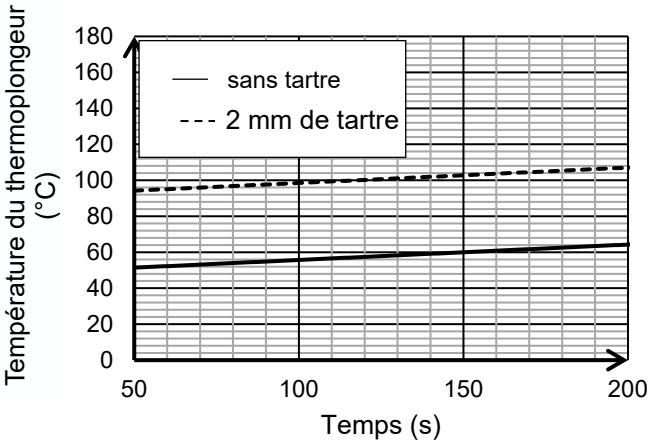


Figure 5. Simulation de la température du thermoplongeur pendant le chauffage

D'après Pezzin A., Giansetti M., Ferri A., Comsol Conference Proceedings, 2013

Q19. En utilisant les figures 4 et 5, déterminer la durée nécessaire au chauffage de l'eau dans le cas où il n'y a pas de tartre sur le thermoplongeur et en déduire la température atteinte par le thermoplongeur à la fin du chauffage. Comparer à la valeur obtenue à la question **Q18.**

L'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maitrise de l'Énergie) recommande de détartrer régulièrement son lave-linge pour éviter une surconsommation énergétique.

Q20. En utilisant la figure 4, montrer que la présence de tartre sur le thermoplongeur augmente la consommation énergétique d'environ 15 % lors du cycle de chauffage de l'eau, par rapport à une situation où le tartre est absent.