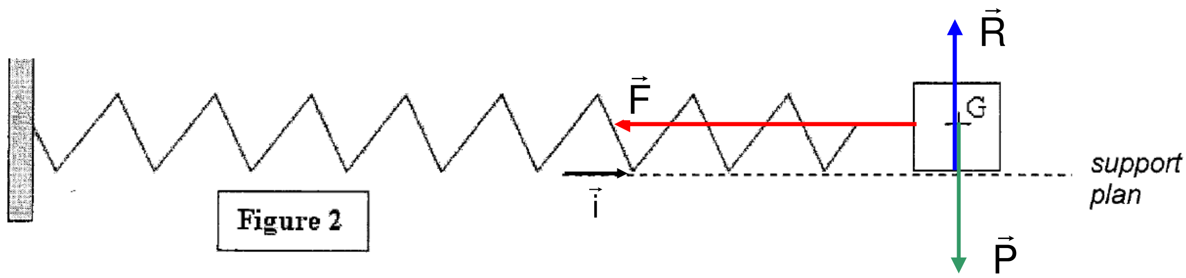
Réunion 2008 **EXERCICE II. PENDULE ELASTIQUE (4 points)**
Correction © http://labolycee.org

1. Trois forces agissent sur le mobile :

- **le poids** $\vec{P}$: force verticale et orientée vers le bas ; **P = m.g** = 0,100 × 10 = **1,0 N** donc $\vec{P}$ mesure 2,0 cm (avec l'échelle: 1 cm ⇔ 0,5 N).
- **la réaction du plan**, $\vec{R}$: verticale et orientée vers le haut car les frottements sont négligés. $\vec{R}$ est égale et opposée à $\vec{P}$ donc $\vec{R}$ mesure aussi 2,0 cm.
- la **force de rappel du ressort** : $\vec{F} = -K.X.\vec{i}$, force horizontale et opposé à $\vec{i}$.
  Au moment du lâcher : **F = K.X$_m$** = 40 × 5,0×10^{-2} = **2,0 N** donc $\vec{F}$ mesure 4,0 cm.



2.1. Montrons que $X(t) = X_m \cos\frac{2\pi t}{T_0}$ est solution de l'équation différentielle du mouvement :

$\frac{dX}{dt} = \dot{X}(t) = -X_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\frac{2\pi t}{T_0}$ et $\frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X}(t) = -X_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\frac{2\pi t}{T_0}$

Reportons X(t) et $\ddot{X}(t)$ dans : $\ddot{\mathbf{X}} + \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{m}}X = 0$

$$\Leftrightarrow -X_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\frac{2\pi t}{T_0} + \frac{K}{m}.X_m\cos\frac{2\pi t}{T_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow X_m\cos\frac{2\pi t}{T_0}.\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{K}{m}\right) = 0$$

Cette relation est valable quel que soit t si : $\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{K}{m}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_0^2 = 4.\pi^2.\frac{m}{K}$

Soit finalement si : $\boxed{T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$ en gardant la solution positive.

2.2. X(0) = 5,0 cm

et $X(t=0) = X_m\cos\frac{2\pi\times 0}{T_0} = X_m.\cos(0) = X_m$

en identifiant les deux expressions il vient : **X_m = 5,0 cm**.

3. Période.

3.1. $T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{0{,}100}{40}} =$ **0,31 s** avec m en kg !!.

3.2.

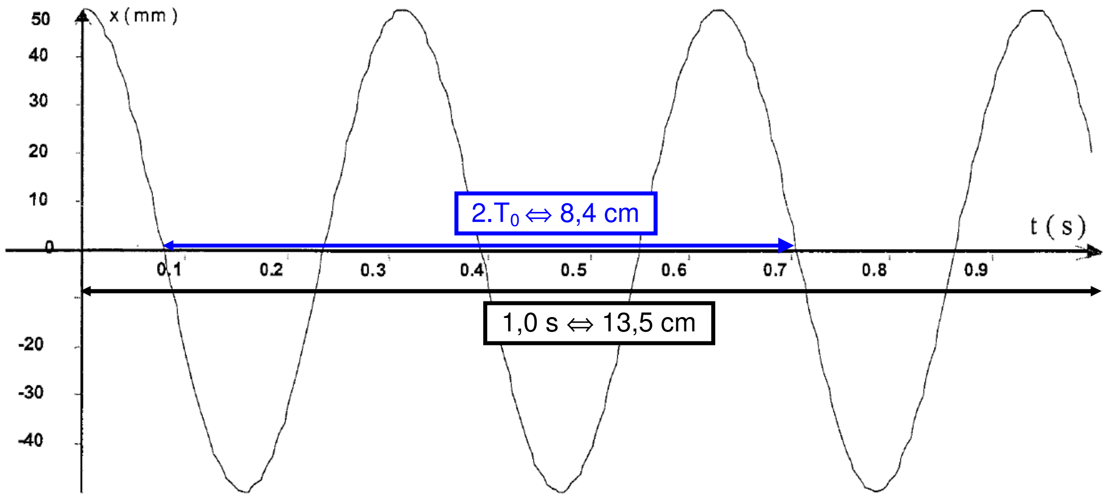


Figure 3

On a donc : $2.T_0 = \dfrac{8,4 \times 1,0}{13,5} = 0,62$ s soit $\mathbf{T_0 = 0,31}$ **s**

Cette valeur est bien en accord celle calculée à la question précédente.

4. Energie mécanique. Vitesse.

4.1. énergie mécanique totale : $\mathbf{E_m = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.X^2}$

Le terme $\frac{1}{2}.m.v^2$ correspond à l'énergie cinétique du solide.

Le terme $\frac{1}{2}.K.X^2$ correspond à l'énergie potentielle élastique du ressort.

4.2. À t = 0, on a : $\mathbf{E_m = \frac{1}{2}.K.X_m^2}$ car le solide est lâché sans vitesse initiale v(t=0) = 0,0 m.s^{-1} avec l'abscisse $X(0) = X_m = 5,0$ cm.

$E_m = \frac{1}{2} \times 40 \times (5,0.10^{-2})^2 = \mathbf{5,0 \times 10^{-2}}$ **J**

4.3. L' énergie mécanique se conserve au cours du mouvement car les forces de frottement et l'amortissement sont négligés. Lorsque G passe par la position d'équilibre X = 0,0 cm ainsi :

$\mathbf{E_m = \frac{1}{2}.m.v^2}$ avec $\mathbf{E_m = 5,0 \times 10^{-2}}$ **J**

$v^2 = \dfrac{2E_m}{m}$ et $\mathbf{v} = \sqrt{\dfrac{2.E_m}{m}}$ en conservant la solution positive.

$\mathbf{v} = \sqrt{\dfrac{2 \times 5,0.10^{-2}}{0,100}} = \mathbf{1,0}$ **m.s^{-1}**

5.1. Avec deux ressorts, le solide peut osciller selon l'axe porté par $\vec{i}$ **sans dévier de cet axe**.

5.2. Sur la figure ci-après : $2.T_0 = \dfrac{10,6 \times 1,0}{14,8} = 0,72$ s soit $\mathbf{T_0 = 0,36}$ **s**

Or ici : $T_0 = 2.\pi\sqrt{\dfrac{m}{K_{eq}}} \Leftrightarrow \dfrac{T_0^2}{4.\pi^2} = \dfrac{m}{K_{eq}} \Leftrightarrow K_{eq} = m.\dfrac{4.\pi^2}{T_0^2}$

$\mathbf{K_{eq}} = 0,100 \times \dfrac{4\pi^2}{0,36^2} = \mathbf{30}$ **N.m^{-1}**.

Or $\mathbf{K_1 + K_2} = 10 + 20 = \mathbf{30}$ **N.m^{-1}**. On a donc bien : $\mathbf{K_{eq} = K_1 + K_2}$.

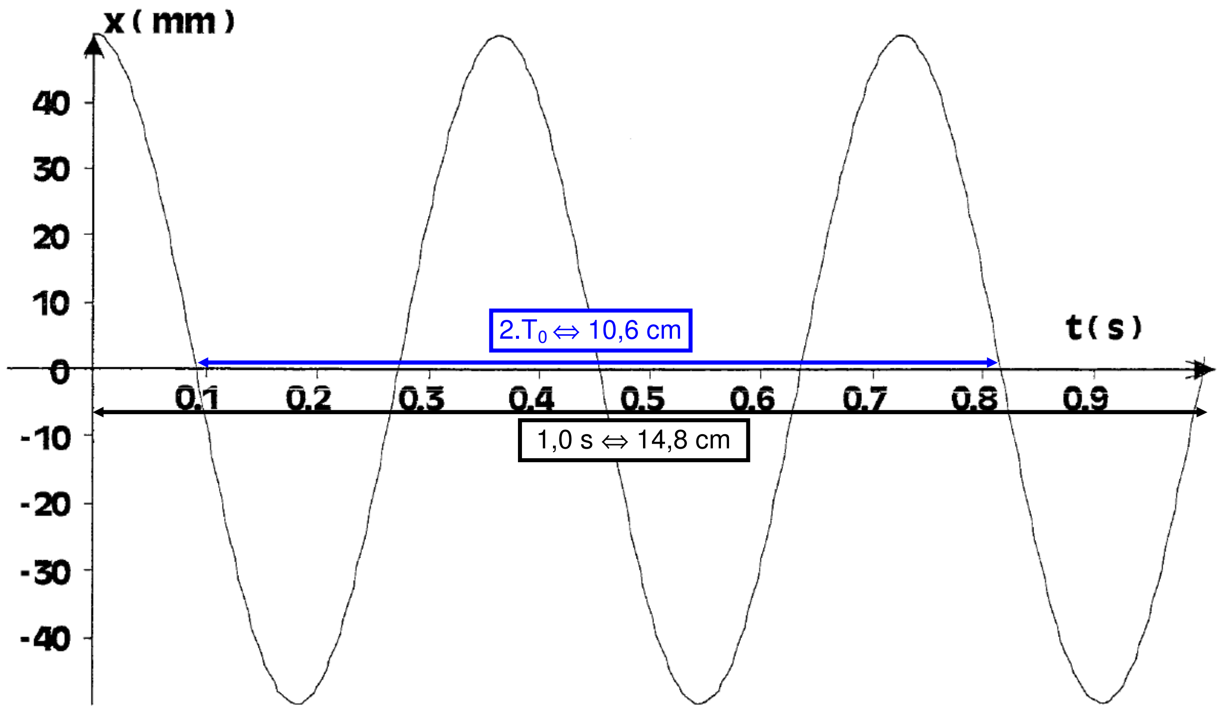


Figure 5

6. Comme T_0 ne dépend pas de l'accélération de la pesanteur g, ce dispositif peut être utilisé dans l'espace pour mesurer la masse d'un solide. Il suffit pour cela de mesurer la valeur de T_0 et connaissant la valeur de K_{eq}, d'en déduire la valeur de m en utilisant la relation :

$$m = \frac{K_{eq}.T_0^2}{4.\pi^2}$$